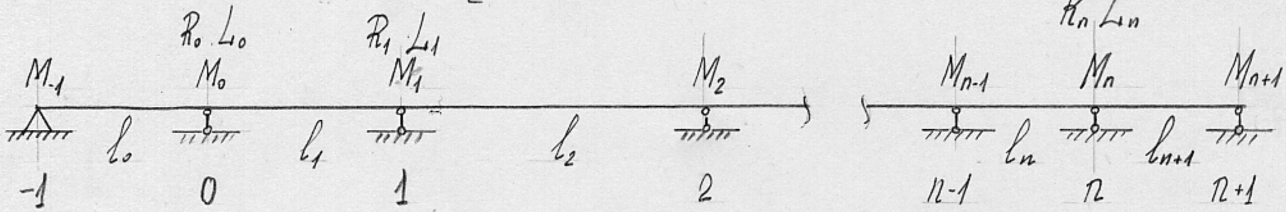
МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ МОМЕНТОВ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ



Заданы:
Левые фиктивные опорные реакции - $L_0, L_1, \cdots, L_n$
Правые фиктивные опорные реакции - $R_0, R_1, \cdots, R_n$
Для i-го пролета опорные реакции будут — L_{i-1}, R_i

Длины пролетов - $l_0, l_1, \cdots, l_n, l_{n+1}$,

Опорные моменты - M_{-1}, M_{n+1}

Необходимо определить моменты $M_0, M_1, \cdots, M_n$

из системы уравнений

$$\begin{cases} M_{i-1} \cdot l_i + 2 M_i (l_i + l_{i+1}) + M_{i+1} \cdot l_{i+1} = -R_i \cdot l_i - L_i \cdot l_{i+1} \\ \text{где } i = 0, 1, \cdots, n. \end{cases} \qquad (1)$$

То есть имеем $n+1$ неизвестных и $n+1$ уравнение.

По условию задачи $l_i \neq 0$ для $i = 1, \cdots, n$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем вспомогательную последовательность

чисел $t_0, t_1, \cdots, t_n$, где $t_i = \dfrac{l_i}{l_{i+1}}$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$

и $t_n = \dfrac{l_{n+1}}{l_n}$

Тогда система (I) приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} 2 M_0 (t_0 + 1) + M_1 = -t_0 (R_0 + M_{-1}) - L_0 & (2) \\ M_{i-1} t_i + 2 M_i (t_i + 1) + M_{i+1} = -R_i t_i - L_i, & (3) \\ \text{где } \quad i = 1, \cdots, n-1 & \\ M_{n-1} + 2 M_n (t_n + 1) = -R_n - L_n t_n - M_{n+1} t_n & (4) \end{cases}$$

Будем M_i, $i=1,2,\cdots,n$ искать в виде $M_i = M_0 N_i + K_i$, где M_0, N_i, K_i — неизвестны и подлежат определению.

Из соотношения (2) получим

$$M_1 = M_0(-2t_0 - 2) + (-t_0(R_0 + M_{-1}) - L_0$$

отсюда $N_1 = -2(t_0+1)$, $K_1 = -(R_0 + M_{-1})t_0 - L_0$

Используем теперь соотношения (3) подставив в них $M_{i+1} = N_{i-1}M_0 + K_{i-1}$ и $M_i = N_i M_0 + K_i$ и получим $t_i N_{i-1} M_0 + t_i K_{i-1} + 2(t_i+1)(N_i M_0 + K_i) + M_i = -R_i t_i - L_i$.

Отсюда $M_{i+1} = M_0(-N_{i-1}t_i - 2N_i(t_i+1)) + (-K_{i-1}t_i - 2K_i(t_i+1) - R_i t_i$ Следовательно имеем

$$\begin{cases} N_{i+1} = -2N_i(t_i+1) - N_{i-1}t_i \\ K_{i+1} = -2K_i(t_i+1) - K_{i-1}t_i - R_i t_i - L_i \end{cases}$$

Определим теперь M_0 подставив M_n, M_{n-1} в (4)

Имеем
$$M_{n-1} = M_0 N_{n-1} + K_{n-1}$$
$$M_n = M_0 N_n + K_n,$$

Тогда из (4) получим

$$(M_0 N_{n-1} + K_{n-1}) + 2(t_n+1)(M_0 N_n + K_n) = -R_n - L_n t_n - M_{n+1} t_n$$

Отсюда
$$M_0 = -\frac{t_n(M_{n+1} + L_n + 2K_n) + R_n + K_{n-1} + 2K_n}{N_{n-1} + 2N_n(t_n+1)}$$

Приведем расчетные формулы в окончательной форме.

Заданы M_{-1}, M_{n+1}, $l_0, l_1, \cdots, l_{n+1}$; $R_0, R_1, \cdots, R_n$; $L_0, L_1, \cdots, L_n$.

Положим $t_n = \frac{l_{n+1}}{l_n}$ и $t_i = \frac{l_i}{l_{i+1}}$, $i = 0,1,\cdots,n-1$

Тогда моменты $M_0, M_1, \cdots, M_n$

определяются по следующим формулам

$M_i = M_0 N_i + K_i \quad , \; i=1,2,\cdots,n$, где

$$\begin{cases} N_0=1, \; N_1=-2(t_0+1), \\ N_{i+1}=-t_i(2N_i+N_{i-1})-2N_i \;, \; i=1,\cdots,n-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_0=0 \;, \; K_1=-(R_0+M_{-1})t - L_0 \\ K_{i+1}=-t_i(R_i+2K_i+K_{i-1})-2K_i-L_i \;, \; i=1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

$$M_0=-\frac{t_n(M_{n+1}+L_n+2K_n)+R_n+K_{n-1}+2K_n}{N_{n-1}+2N_n(t_n+1)}$$

Количество операций необходимое для вычисления моментов $M_0, M_1, \cdots, M_n$ линейно зависит от n и равно $\nu_n = 13n+5$ из них $n+1$ операций на вычисление последовательности $t_0, t_1, \cdots, t_n$;

10 операций на вычисление M_0;

$4(n-1)+1$ — на вычисление последовательности $N_1, N_2, \cdots, N_n$

$6(n-1)+3$ — на вычисление последовательности $K_1, K_2, \cdots, K_n$;

$2n$ — операций на вычисление $M_1, M_2, \cdots, M_n$.

В частности $\nu_2=31$; $\nu_3=44$; $\nu_4=57$, $\nu_5=70$.

Применение стандартных методов линейной алгебры для решения этой задачи, даже с учетом ее специфики, приводит к громоздким и малоэффективным вычислительным процедурам, которые в лучшем случае обеспечивают количество операций, асимптотически пропорциональны третьей степени числа пролетов - n.
Для сравнения, например, приведем значения для количества операций необходимых при решении этой задачи с помощью определителей.
Обозначим количество операций в этом случае через ϑ_n.

Вывод формулы для ϑ_n дан в приложении.

Здесь же приведем значения ϑ_n при $n=2,3,4,5.$

Имеем $\vartheta_2 = 61$, $\vartheta_3 = 132$, $\vartheta_4 = 263$

$\vartheta_5 = 506$

Таким образом количество операций в предложенном методе меньше, чем в общепринятом

при $n=2$ в 2 раза

при $n=3$ в 3 раза

при $n=4$ в 4,6 раза

при $n=5$ в 7,2 раза

Приложение.

Традиционное решение задачи и объем вычислительных операций $- \vartheta_n$.

Перепишем систему (I) в следующем виде

$$\begin{cases} 2M_0(l_0+l_1)+M_1 l_1 = -M_{-1} l_0 - R_0 l_0 - L_0 l_1 \\ M_{i-1} l_i + 2M_i(l_i+l_{i+1}) + M_{i+1} l_{i+1} = -R_i l_i - L_i l_{i+1}, \\ \text{где } i=1,\dots,n-1 \\ M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n+l_{n+1}) = -M_{n+1} l_{n+1} - R_n l_n - L_n l_{n+1} \end{cases}$$

Матрицу системы обозначим через A_n

$$A_n = \begin{pmatrix} 2(l_0+l_1) & l_1 & & & & & \\ l_1 & 2(l_1+l_2) & l_2 & & & & \\ & l_2 & 2(l_2+l_3) & l_3 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & l_{n-1} & 2(l_{n-1}+l_n) & l_n \\ & & & & & l_n & 2(l_n+l_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов $- B_n$

$B_n^* = (-M_{-1} l_0 - R_0 l_0 - L_0 l_1, -R_1 l_1 - L_1 l_2, \dots, -R_{n-1} l_{n-1} - L_{n-1} l_n,$
$-M_{n+1} l_{n+1} - R_n l_n - L_n l_{n+1})$

Матрицу полученную из A_n заменой i -го столбца

на столбец B_n обозначим A_{ni}, где $i=0,1,\dots,n$

Тогда $M_i = \dfrac{|A_{ni}|}{|A_n|}$, $i=0,1,\dots,n$.

Займемся вичислением $|A_n|$ (определителя матрицы A_n)

Разложим $|A_n|$ по элементам $n+1$ столбца

$$|A_n| = 2(l_n + l_{n+1})|A_{n-1}| - l_n|A'_{n-1}|,$$ где

A'_{n-1} - матрица полученная из A_n удалением $n+1$ столбца и n-ой строки.

$$A'_n = \begin{pmatrix} 2(l_0+l_1) & l_1 & & & & \\ l_1 & 2(l_1+l_2) & l_2 & & & \\ & l_2 & 2(l_2+l_3) & l_3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & l_{n-2} & 2(l_{n-2}+l_{n-1}) & l_{n-1} \\ & & & & & l_n \end{pmatrix}$$

Отсюда $|A'_n| = l_n|A_{n-2}|$ и значит

$$|A_n| = 2(l_n + l_{n+1})|A_{n-1}| - l_n^2|A_{n-2}|$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2(l_0+l_1) & l_1 \\ l_1 & 2(l_1+l_2) \end{vmatrix}$$

Если обозначить количество операций потребное для вычисления $|A_n|$ через Γ_n, то имеем $\Gamma_0 = 2$; $\Gamma_1 = 6$ и

$$\underline{\Gamma_n = \Gamma_{n-1} + \Gamma_{n-2} + 6} \qquad (7)$$

Займемся теперь вычислением $|A_{ni}|$.

Положим $R_0 := R_0 + M_{-1}$ и $L_n := L_n + M_{n+1}$

на что у нас уйдет две операции

После этого столбец свободных членов будет однотипную структуру $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$,

$b_i = -R_i l_i - L_i l_{i+1}$, $i = 0, 1, \cdots, n$ и на его вычисление уйдет $3(n+1)$ операций.

Пусть теперь $i = 0, 1, \cdots, n-2$. Тогда

$$|A_{ni}| = 2(l_n + l_{n+1})|A_{n-1\,i}| - l_n^2|A_{n-2\,i}|,$$

Отсюда, количество операций необходимое для вычислений удовлетворяет соотношению (7). Если же $i = n-1, n$, то разлагать определитель будем по первому и второму столбцу, что приведет к аналогичному соотношению, то есть к задачам того же типа размерности $n-1$ и $n-2$, соответственно,

только усеченным сверху.
Начальные условия будут одними и теми же, то есть матрицы вида

A_{00} и A_{10} и A_{11}. Поэтому если обозначить количество операций по вычислению A_{ni} через T_n, то T_n будет

удовлетворять соотношению

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 6 \\ T_0 = 0, \quad T_1 = 5 \end{cases}$$, где

Кроме всего $n+1$ операция на вычисление M_i

Поэтому окончательно получим

$$\begin{cases} \vartheta_n = 4n + 6 + \Gamma_n + (n+1) T_n, \quad \text{где} \\ \Gamma_n = \Gamma_{n-1} + \Gamma_{n-2} + 6, \quad \Gamma_0 = 2, \quad \Gamma_1 = 6 \\ T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 6, \quad T_0 = 0; \quad T_1 = 5 \end{cases} \tag{8}$$

В частности:

$\Gamma_2 = 14$, $\Gamma_3 = 26$, $\Gamma_4 = 46$, $\Gamma_5 = 78$

$T_2 = 11$, $T_3 = 22$, $T_4 = 39$, $T_5 = 67$

Отсюда:

$$\vartheta_2 = 8 + 6 + 14 + 3 \times 11 = 61$$

$$\vartheta_3 = 12 + 6 + 26 + 4 \times 22 = 132$$

$$\vartheta_4 = 16 + 6 + 46 + 5 \times 39 = 263$$

$$\vartheta_5 = 20 + 6 + 78 + 6 \times 67 = 506$$

Приложение 2. Проверочный расчет.

Пусть $n=2$. Имеем

. Положим,

$l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = l$

Далее предположим, что опорные моменты в опорах (-I) и (3) равны нулю.

(Например в случае когда опоры (-I) и (3) подвижны на катках).

Нагрузки прилагаются в середине пролетов и все равны по величине.

Тогда можно применить таблицы Менша. Имеем

$R_0 = R_1 = R_2 = \frac{3}{8} pl$

$L_0 = L_1 = L_2 = \frac{3}{8} pl$

По таблицам Менша $M_0 = -0.161\, p\cdot l$,

$M_1 = -0.107\, pl$; $M_2 = -0.161\, p\cdot l$

Проведем теперь расчет по предлагаемой методике.

Имеем $t_0 = t_1 = t_2 = 1$

$N_0 = 1$; $N_1 = -4$; $N_2 = 15$

$K_0 = 0$; $K_1 = -\frac{3}{4} pl$, $K_2 = -\left(\frac{3}{8} pl - \frac{3}{2} pl\right) + \frac{3}{2} pl -$

$- \frac{3}{8} pl = 3pl\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} pl$

$$M_0 = -\frac{\frac{3}{8} pl + \frac{9}{2} pl + \frac{3}{8} pl - \frac{3}{4} pl + \frac{9}{2} pl}{56} = -\frac{9}{56} pl$$

$$M_1 = -\frac{9}{56} pl \times (-4) - \frac{3}{4} pl = -\frac{(42-36)}{56} pl = -\frac{6}{56} pl = $$
$$= -\frac{3}{28} pl$$

$$M_2 = -\frac{9}{56} pl \times 15 + \frac{9}{4} pl = -\frac{9}{56} pl (15 - 14) = -\frac{9}{56} pl.$$

Остается заметить, что $\frac{9}{56} \approx 0.161$, $\frac{3}{28} \approx 0.107$

АННОТАЦИЯ

До настоящего времени для определения опорных моментов в многопролетных балках проектировщики пользовались специальными таблицами Менша, расчитанными для случаев, когда число пролетов не превосходит 5, длины пролетов совпадают и начальные условия заданы специальным образом.

В случаях, когда условия задачи не попадают в область применения указанных таблиц, проектировщикам приходится искать решения системы уравнений, возникающей при решении задачи, с помощью определителей либо методом последовательного исключения.

Реализация этих методов требует выполнения громоздких нестандартных преобразований и трудоемких вычислений.

В данной работе предлагается и обосновывается методика решения этой задачи в общем случае, без специфических допущений, с числом операций линейно зависящих от количества пролектов, количество выполняемых операций в наиболее встречающихся случаях (число пролетов от двух до пяти) сокращается в среднем в 4 раза по сравнением с обычно применяемыми методами.

ИНЖЕНЕР /А.М.АЛЬТ/

ГЛАВНЫЙ КОНСТРУКТОР /М.П.СТЕПАНОВ/